Probe klausur 07/08

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix.
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Sei $f : V \to V$ definiert durch $f(a + bT + cT^2) = (a + c) + bT^2$ für alle $a + bT + cT^2 \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Wählen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V und berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(f)$.

[*4 + 4 + 2 = 10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $U = \{2a + 3b + bT + aT^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[T]$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

[*6 + 8 = 14 Punkte*]

WS 07/08

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $V = \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $f : V \to V$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und von $\mathrm{Kern}(f)$.

[*4 + 12 = 16 Punkte*]

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[*4 Punkte*]

Nachklausur 07/08

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei v_1, v_2, v_3 eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Sei $f : V \to V$ die lineare Abbildung, die durch $f(v_1) = v_2 + v_3$, $f(v_2) = v_3$ und $f(v_3) = v_1 - v_2$ definiert wird.

Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ und $\dim(\mathrm{Bild}(f))$.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$.

Sei $U = \{a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

Aufgabe 4

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to V$ linear, und sei $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$.

1. Beweisen Sie, dass $\dim(V)$ gerade ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und eine lineare Abbildung f mit $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$. (Begründung bitte nicht vergessen.)

[*2 + 6 = 8 Punkte*]

WS O8/09

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$, und sei $W = M_{22}(\mathbb{R})$.

Sei $f : V \to W$ definiert durch $f(a_0 + a_1T + a_2T^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & 2a_2 \\ -a_2 & a_1 - a_0 \end{pmatrix}$ für alle $a_0 + a_1T + a_2T^2 \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
3. Wählen Sie Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W und bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

[*4 + 6 + 6 Punkte*]

SS 09

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Treppennormalform und den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R}).$$

[8 Punkte]

Aufgabe 3

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[T]$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)+(a+b)T+(a+b+c+d)T^2$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

[4 + 8 = 12 Punkte]

Aufgabe 4

Sei X_0 eine fest gewählte Matrix in $\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$. Sei $V = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \mid AX_0 = 0\}$. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[4 Punkte]

WS 09/10

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
3. Beweisen Sie, dass f injektiv ist.

[*4 + 8 + 4 = 16 Punkte*]

SS 10

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{43}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Sei $f : V \to \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ definiert durch $f\left(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i\right) = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 \\ a_1 + a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ für alle $\sum_{i=0}^{2} a_i T^i \in V$.

Beweisen Sie, dass f linear ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Seien $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängige Vektoren in V, von denen jeweils $n-1$ linear unabhängig sind. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ Skalare, sodass $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ist.

Beweisen Sie: Entweder sind alle Skalare $a_i = 0$ oder es sind alle $a_i \neq 0$.

WS 10/11

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die zu A inverse Matrix.

[6 Punkte]

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für alle $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sei $\mathrm{Spur}(A)$ definiert durch $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, also die Summe der Diagonalelemente von A.

1. Beweisen Sie, dass $V_n = \{A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $V_2 = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$.

[4 + 8 = 12 Punkte]

Aufgabe 4

Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $a_0 \in \mathbb{K}$ fest gewählt. Sei $f_{a_0} : V \to V$ definiert durch $f_{a_0}(v) = a_0 v$ für alle $v \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f_{a_0} linear ist.
2. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Kern}(f_{a_0})$ und von $\mathrm{Bild}(f_{a_0})$.

[2 + 8 = 10 Punkte]

SS 11

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Treppennormalform und den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. im Fall $A \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$.
2. im Fall $A \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{F}_2)$.

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 3

Finden Sie einen 3-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der keinen einzigen Vektor der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ enthält.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien f und g lineare Abbildungen von V nach V. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Kern}(g) \subseteq \mathrm{Kern}(f+g)$ gilt.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von λ) die Treppennormalform von A_λ.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von V.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ diejenige Abbildung, die jeder Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix $f(A) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & d \end{pmatrix}$ zuordnet.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*3 + 7 = 10 Punkte*]

SS 12

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $C[a,b]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ (Sie müssen nicht zeigen, dass dies ein Vektorraum ist). Zeigen Sie, dass

$$U = \{f \in C[a,b] \mid \int_a^b f(x)dx = 0\}$$

ein Unterraum von $C[a,b]$ ist.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängig. Sei $v_3 \in V$ so, dass v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind. Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{K}$ mit

$$v_3 = av_1 + bv_2$$

gibt.

[*6 Punkte*]

WS 12/13

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

Aufgabe 5

Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[T] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 2\}$. Sei $f : V \longrightarrow M_{14}(\mathbb{R})$ mit $f(a_0+a_1T+a_2T^2) = (a_0, -a_1, a_2, a_0 + a_1 + a_2)$. Die Abbildung f ist linear, was Sie aber nicht beweisen müssen.

1. Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
2. Berechnen Sie ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ mit $\mathcal{B} = (1, T, T^2)$ und

$$\mathcal{C} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).$$

[6 + 4 = 10 Punkte]

[4 + 6 = 10 Punkte]

SS 13

Aufgabe 1

Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

mindestens eine Lösung?

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$ und $\varphi : M_{22}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ mit $\varphi(A) = AX - XA$ für alle $A \in M_{22}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $M_{22}(\mathbb{R})$.

[*4 + 8 = 12 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien U, V, W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen, so dass φ injektiv ist, ψ surjektiv ist und $\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\psi)$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

gilt.

[*10 Punkte*]

WS 13/14

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & a+2b \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie Kern(f) und Basen von Kern(f) und Bild(f).

[*10 Punkte*]

SS 14

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Untersuchen Sie für welche $t \in \mathbb{R}$ die folgende Menge U_t ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

$$U_t = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = t \right\}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$.

Beweisen Sie: Ist $f \neq \mathrm{id}_V$, so ist f nicht injektiv.

Aufgabe 5

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Seien $v_{12} = v_1 - v_2$, $v_{13} = v_1 - v_3$ und $v_{23} = v_2 - v_3$.

1. Bestimmen Sie eine Basis von $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23} \rangle$.
2. Ergänzen Sie Ihre im ersten Teil der Aufgabe gefundene Basis von $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23} \rangle$ zu einer Basis von V.

[*6 + 6 Punkte*]

WS 14/15

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Ergänzen Sie

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$; zeigen Sie, dass Sie tatsächlich eine Basis gefunden haben.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils für

$$a) \;\; V = \mathbb{R}^2 \quad , \qquad b) \;\; V = \mathbb{R}^3$$

entweder eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit Kern(f)=Bild(f) an oder begründen Sie, warum es eine solche Abbildung nicht geben kann.

[*6 + 6 Punkte*]

SS 15

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^5$.

Bestimmen Sie eine Basis von Kern(f) und von Bild(f).

[*18 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien U und W Unterräume von V. Seien $u \in U$, $u \neq 0$ und $w \in W$, $w \neq 0$.

Beweisen Sie: Wenn $U \cap W = \{0\}$ ist, dann sind u und w linear unabhängig.

[*10 Punkte*]

WS 15/16

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von der Konstanten $m \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

[*14 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie Kern(f) und Basen von Kern(f) und Bild(f).

[*10 Punkte*]

SS 16

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$?

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

(c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R}).$$

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ und bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge.

(b) Ergänzen Sie Ihre in (a) gefundene Basis zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$.

(c) Sei $\mathcal{B}$ die Basis aus (b) und $\mathcal{C}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$ die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

(Hinweis: Sollten Sie keine Lösung für (a) gefunden haben, ergänzen Sie in (b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$. Sollten Sie in (b) keine Basis bestimmt haben, lösen Sie (c) mit einer beliebigen Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^4$, bei der jeder Basisvektor mindestens zwei Einträge ungleich Null besitzt.)

[8 + 4 + 4 = 16 Punkte]

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ linear. Beweisen Sie, dass genau dann $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ gilt, wenn $\mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$ ist.

[8 Punkte]

WS 16/17

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & 7 & 11 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\25\\14\end{pmatrix}.$$

[12 Punkte]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to M_{22}(\mathbb{R})$ mit

$$f(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a+b+c & a-b\\ 2a+c & 2b+c\end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f)$ und Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

[12 Punkte]

SS 17

Aufgabe 2 ✓

Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a) die Treppennormalform von A.

(b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{R}$, so dass die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $x \mapsto Ax$ nicht bijektiv ist.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 3 ✓

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Sei

$$U_f = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $U_f \cap \mathrm{Kern}(f) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ gilt.

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Seien $v, w \in V$ mit $v, w \neq 0$. Weiter gebe es $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq \mu$ so dass $f(v) = \lambda v$ und $f(w) = \mu w$ gilt. Zeigen Sie, dass v und w linear unabhängig sind.

[*8 Punkte*]

WS 17/18

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und ggf. die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Es gibt eine lineare Abbildung $f_i : V_i \to V_i$ mit Bild(f_i)=Kern(f_i)

i) für $V_1 = \mathbb{R}^2$,

ii) für $V_2 = M_{33}(\mathbb{R})$,

iii) für $V_3 = \mathbb{K}[T]$.

(Bei Angabe eines korrekten Beispiels für einen Beweis müssen Sie die Linearität nicht nachrechnen, aber Bild und Kern - ebenfalls ohne Beweis - korrekt angeben.)

[*4 + 4 + 6 = 14 Punkte*]

SS 18

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$ gilt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von Kern(f).

(d) Zeigen Sie, dass f surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(e) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ für $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ und $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

[*4 + 2 + 4 + 2 + 4 = 16 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $S = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq V$.

(a) Zeigen Sie: $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1 \rangle$.

(b) Gilt immer $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1 \rangle$?

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit kurzer Begründung) für

(a) ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen.

(b) eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die einen Häufungspunkt besitzt, der nicht in der Menge enthalten ist.

(c) reelle Zahlen a und b, so dass $\int_a^b e^{-x}dx = 1$ gilt.

[*3 + 3 + 4 = 10 Punkte*]

WS 18/19

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und ggf. die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

[*14 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5 \ , \ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu zeigen brauchen). Bestimmen Sie Basen von Kern(f) und Bild(f) und überprüfen Sie die Aussage des Rangsatzes.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit kurzer Begründung) für

a) eine lineare Abbildung f mit dim(Kern(f))=1;

b) eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die Infimum und Maximum, aber kein Minimum besitzt;

c) eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

d) eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in $x_0 = 1$ stetig, aber nicht diffferenzierbar ist.

[*4 + 3 + 3 + 4 = 14 Punkte*]

SS 19

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\ & & & & x_3 & & & + & x_5 & = & 0. \end{array}$$

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

1. Genau eine der beiden folgenden Abbildungen ist linear. Begründen Sie für beide Abbildungen, warum sie linear bzw. nicht linear sind.

   (a) $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad + bc$,

   (b) $g : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a - 2(b + c) - d$.

2. Genau eine der beiden folgenden Mengen ist eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^4$. Begründen Sie für beide Mengen, warum sie linear unabhängig bzw. linear abhängig sind.

   (a) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,

   (b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ mit $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Diese Abbildung ist linear, was Sie nicht beweisen müssen. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(f)$.

[*8 Punkte*]